المحاضرة النظرية الخامسة عشر

☼ المصفوفة المربعة القابلة للتقطير ☼

تعريف: نفرض A مصفوفة مربعة نقول عن هذه المصفوفة أنها قابلة للتقطير أو قطورة إذا كانت مشابهة لمصفوفة قطرية أي إذا وجدت مصفوفة مربعة قابلة للقلب P بحيث يكون

$$P^{-1} A P = D$$

حيث D هي المصفوفة القطرية

ملاحظة: نسمي المصفوفة P و المحققة للعلاقة السابقة بالمصفوفة المقطرة للمصفوفة A

♡ مبرهنة دون برهان ♡

تكون المصفوفة المربعة A قابلة للتقطير (قطورة) إذا كان لهذه المصفوفة المربعة والتي مرتبتها n أشعة ذاتية مستقلة خطياً فإذا فرضنا أن لهذه المصفوفة n قيمة ذاتية هي $(\lambda_1, \lambda_2 .... \lambda_n)$ والتي تقابلها الأشعة الذاتية $P_1, P_2 .... P_n$ مستقلة خطياً عندئذٍ تكون المصفوفة المقطرة لـ A هي المصفوفة التالية

$$P = [P_1, P_2 .... P_n]$$

والتي عمودها الأول هو الشعاع الذاتي P_1

وعمودها الثاني // // // P_2

⋮

وعمودها النوني هو الشعاع الذاتي P_n

وتكون المصفوفة القطرية المشابهة لـ A هي المصفوفة التالية

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & \end{bmatrix}$$

نتيجة: بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n إذا كان لهذه المصفوفة n قيمة ذاتية مختلفة فيما بينها فإن هذه المصفوفة قابلة للتقطير

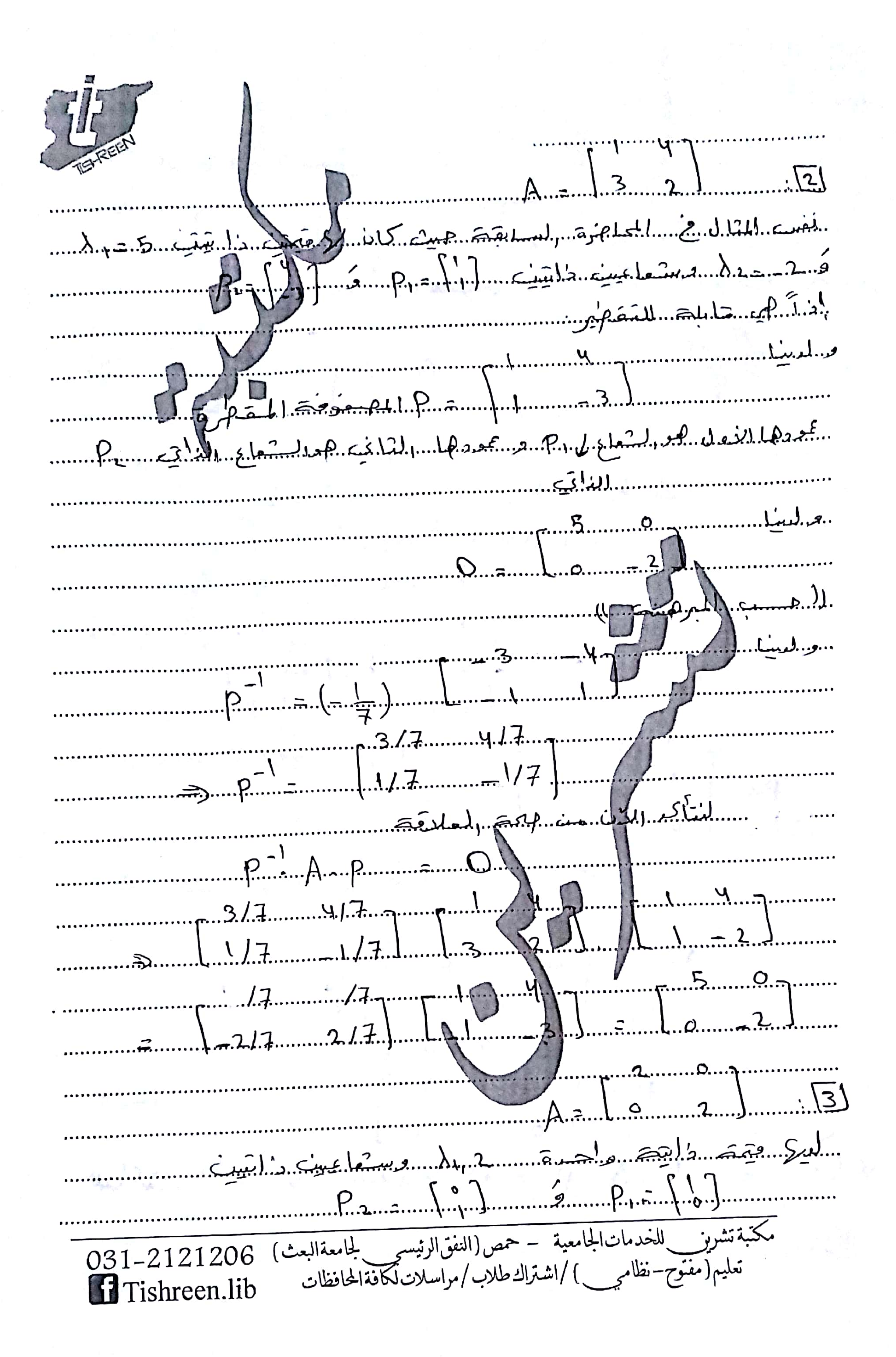
أما إذا كان لهذه المصفوفة قيمة ذاتية عددها أقل من رتبة المصفوفة عندها نبحث عن الأشعة الذاتية المقابلة للقيم الذاتية فإذا كان عددها مساوياً لرتبة المصفوفة تكون قابلة للتقطير.
وإلا فهي ليست قابلة للتقطير

أمثلة: بين فيما إذا كانت المصفوفة قابلة للتقطير أو لا وأوجد المصفوفة المقطرة في حال كانت قابلة للتقطير لكل من المصفوفات الآتية

1) : $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

وهو نفس المثال في المحاضرة السابقة حيث أوجدنا القيم والأشعة الذاتية فكان لا قيمة ذاتية واحدة $\lambda_{1,2} = -1$ وشعاع ذاتي واحد فهي غير قطورة لأن رتبة المصفوفة تساوي 2 لتكون قطورة يجب أن يكون لها قيمتين ذاتيتين وشعاعين ذاتيين
والشعاع الذاتي لهذه المصفوفة هو

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



2 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

نفس المثال في المحاضرة السابقة حيث كان قيمتين ذاتيتين $\lambda_1 = 5$

و $\lambda_2 = -2$ وشعاعين ذاتيين $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

إذاً A هي قابلة للتقطير

ولدينا

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$ المصفوفة المقطرة

عمودها الأول هو الشعاع P_1 وعمودها الثاني هو الشعاع الذاتي P_2 الذاتي

ولدينا

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

((حسب المبرهنة))

ولدينا

$$P^{-1} = \left(-\frac{1}{7}\right) \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 1/7 & -1/7 \end{bmatrix}$$

لنتأكد الآن من صحة العلاقة

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 1/7 & -1/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

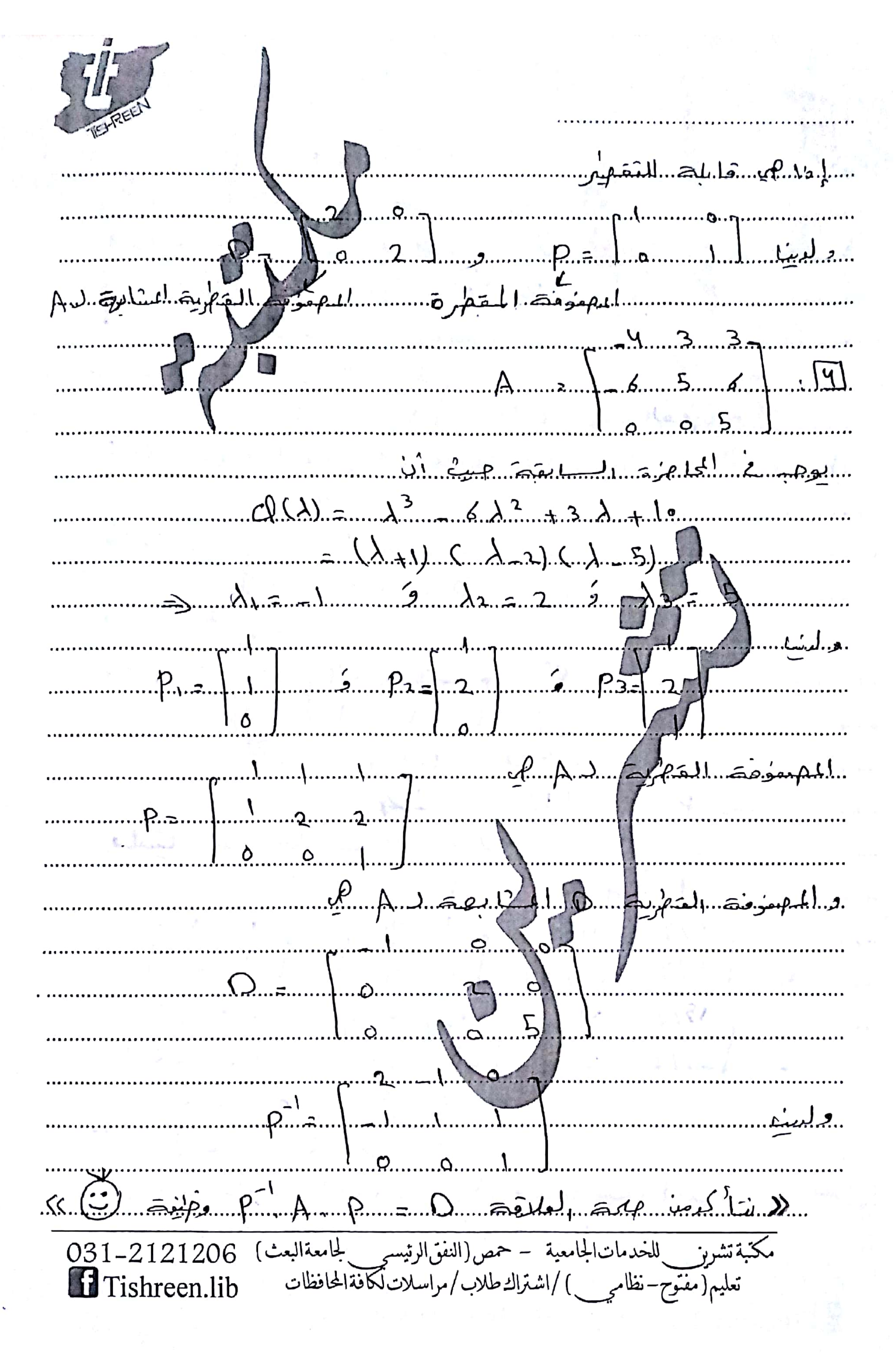
$$= \begin{bmatrix} /7 & /7 \\ -2/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لدينا قيمة ذاتية واحدة $\lambda_1 = 2$ وشعاعين ذاتيين

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



إذاً هي قابلة للتقطير

ولدينا $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

المصفوفة المقطرة   المصفوفة القطرية المشابهة لـ A

٦) : $A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ -6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

يوجد في المحاضرة السابقة حيث أن

$$cl(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ و } \lambda_2 = 2 \text{ و } \lambda_3 = 5$$

ولدينا

$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

المصفوفة القطرية لـ A هي

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

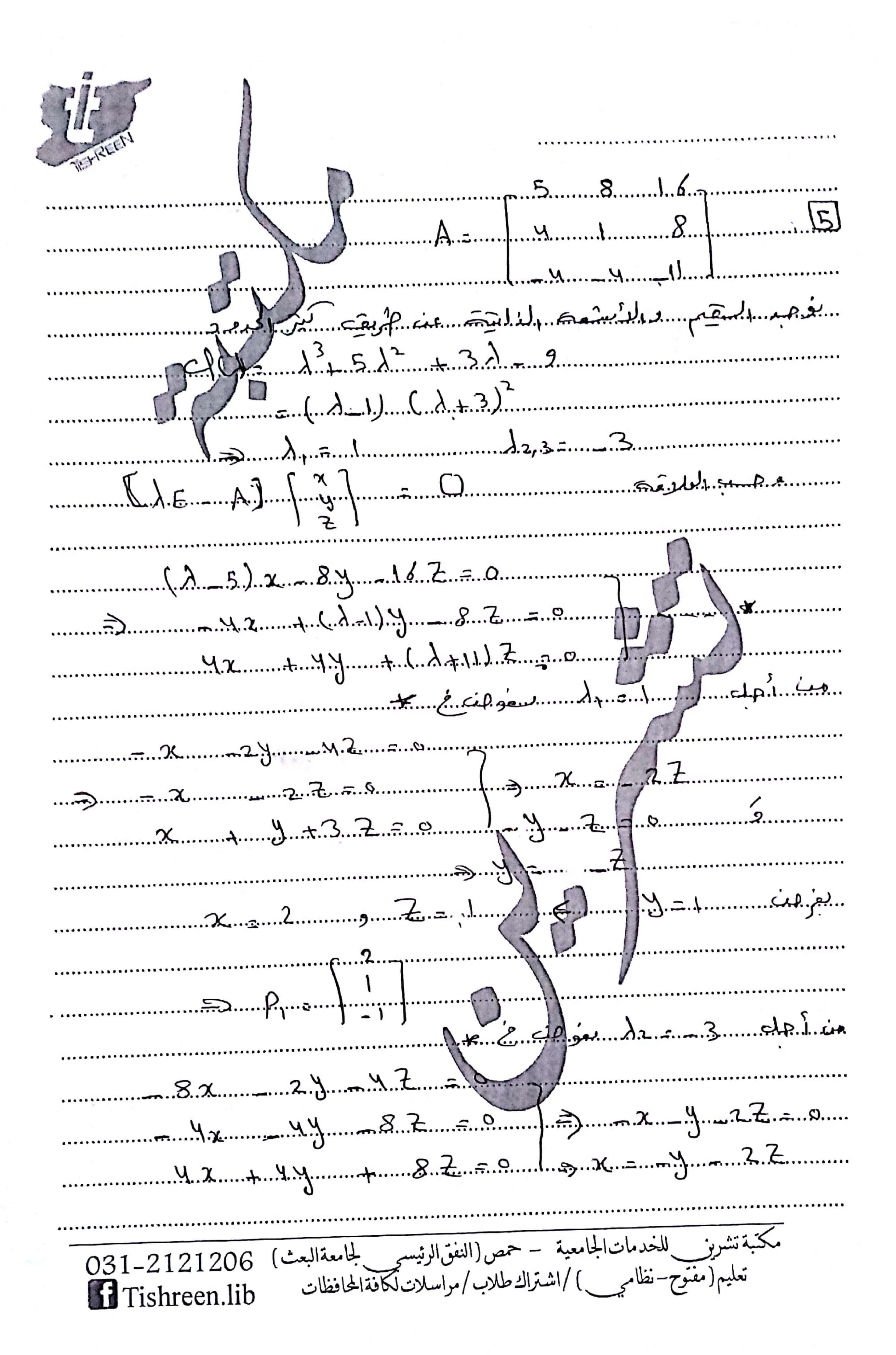
والمصفوفة القطرية D المشابهة لـ A هي

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ولدينا

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

« نتأكد من صحة العلاقة $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ وظيفة »



5

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

نوجد القيم والأشعة الذاتية عن طريق كثير الحدود

$C(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$

$= (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = -3$

من العلاقة $[\lambda E - A]\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$

$(\lambda - 5)x - 8y - 16z = 0$

$\Rightarrow -4x + (\lambda - 1)y - 8z = 0$ *

$4x + 4y + (\lambda + 11)z = 0$

من أجل $\lambda_1 = 1$ نعوض في *

$-x - 2y - 4z = 0$

$\Rightarrow -x - 2z = 0$ $\qquad \Rightarrow x = -2z$

$x + y + 3z = 0$ $\qquad$ و $-y - z = 0$

$\Rightarrow y = -z$

بفرض $y = 1 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad z = -1$

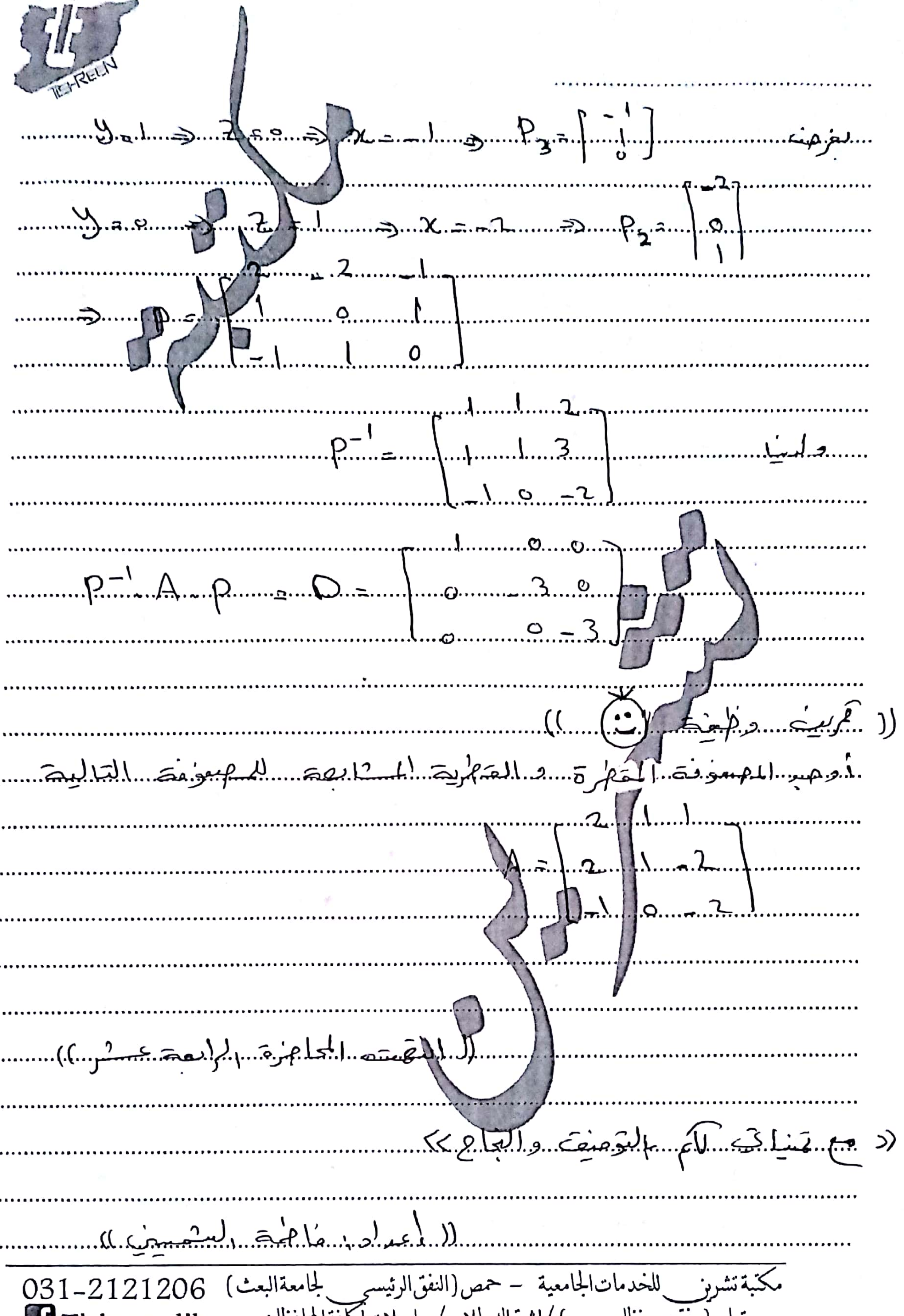
$\Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

من أجل $\lambda_2 = -3$ نعوض في *

$-8x - 2y - 4z = 0$

$-4x - 4y - 8z = 0 \quad \Rightarrow -x - y - 2z = 0$

$4x + 4y + 8z = 0 \quad \Rightarrow x = -y - 2z$



نفرض $y = 1 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$y = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ولدينا

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

((تمرين وظيفة :)))

أوجد المصفوفة المقطرة و القطرية المشابهة للمصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

((انتهت المحاضرة الرابعة عشر))

<< مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح >>

((إعداد: فاطمة الشمسين))